

Dynamische Fuzzy-Systeme: Stabilitätsanalyse und Reglerentwurf¹

E. Schäfers, V. Krebs, M. Sackmann

Universität Karlsruhe, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Kaiserstr. 12, 76131 Karlsruhe

Tel. 0721/608-3179, Fax 0721/608-2707

e-mail: schaefer@irs.etec.uni-karlsruhe.de

Kurzfassung

Dynamische Fuzzy-Systeme können zur qualitativen Modellierung dynamischer Prozesse verwendet werden. Wegen der Rückkopplung der unscharfen, nicht defuzzifizierten Ausgangsgröße wird in diesem Beitrag zur Beschreibung dynamischer Fuzzy-Systeme mit der Inferenz mittels interpolierender Regeln [6] eine Inferenzmethode verwendet, die interpretierbare unscharfe Mengen wieder auf interpretierbare, zur unscharfen Weiterverarbeitung geeignete Mengen abbildet. Aufbauend auf einer für dynamische Fuzzy-Systeme geeigneten Stabilitätsdefinition werden Ansätze zur Stabilitätsanalyse solcher Systeme aufgezeigt. Weiterhin wird ein Syntheseverfahren erläutert, das eine linguistische Beschreibung eines Fuzzy-Reglers liefert, der das System in eine gewünschte Ruhelage bringt. Abschließend wird dieses Entwurfsverfahren anhand der Regelung eines qualitativ beschriebenen Rührkesselreaktor veranschaulicht.

1 Einführung

Der erste Schritt einer systematischen Vorgehensweise zum Entwurf einer Regelung besteht zumeist aus der Modellierung der Regelstrecke. Eine Analyse des Streckenmodells bildet die Grundlage, um das eigentliche Ziel, die Regelungssynthese, zu erreichen. Zur Modellierung der Strecke werden, je nach Abstraktionsgrad und Vorwissen über die Streckeneigenschaften, die verschiedensten Methoden angewandt, das resultierende mathematische Modell weist dann eine entsprechende Struktur auf.

Ein mathematisches Modell ist für komplexe Prozesse oftmals nicht oder nur unter großem Aufwand bestimmbar. In manchen Fällen kann jedoch das dynamische Verhalten des Prozesses zumindest linguistisch in Form von Wenn-Dann Regeln charakterisiert werden. In diesem Beitrag wird eine Methode vorgestellt, die, allein auf einem Wenn-Dann Regelsatz zur Streckenbeschreibung basierend, eine Analyse der Regelstrecke und den Entwurf eines Fuzzy-Reglers ermöglicht.

Aufbauend auf einer linguistischen Streckenbeschreibung kann mit Hilfe der Fuzzy-Logik ein unscharfes mathematisches Streckenmodell erstellt werden. Die im Wenn-Teil und Dann-Teil auftretenden linguistischen Werte werden durch Fuzzy-Mengen modelliert. Jedes Inferenzverfahren bildet, dem Regelsatz entsprechend, unscharfe Eingangsgrößen auf eine unscharfe Ausgangsgröße ab. Ein Inferenzverfahren stellt somit eine bestimmte mathematische Interpretation eines Regelsatzes dar. Auch Vergangenheitswerte der un-

¹Diese Arbeit wird von der DFG unter Kr 949/5 gefördert.

scharfen Ausgangsgröße sind Eingangsgrößen der Inferenzmaschine; das so entstehende mathematische Streckenmodell des dynamischen Prozesses ist ein dynamisches Fuzzy-System.

Da die Inferenz das unscharfe Schließen eines Menschen nachzubilden hat, können nur solche unscharfe Mengen als Eingangsgrößen sinnvoll verarbeitet werden, die linguistisch interpretierbar sind. Die unscharfe Ausgangsgröße wird ohne vorherige Defuzzifizierung rückgekoppelt, es muß somit ein Inferenzverfahren verwendet werden, das aus interpretierbaren unscharfen Eingangsgrößen eine interpretierbare unscharfe Ausgangsgröße generiert. In [6] wurde die Inferenz mittels interpolierender Regeln als ein Verfahren vorgestellt, das interpretierbare Eingangsgrößen in Form triangulärer unscharfer Zahlen auf eine trianguläre unscharfe Zahl im Ausgangsbereich abbildet.

In diesem Beitrag werden für dynamische Fuzzy-Systeme, deren unscharfe Ausgangsgröße anhand der Inferenz mittels interpolierender Regeln bestimmt wird, Ansätze zur Stabilitätsuntersuchung und zum Reglerentwurf vorgestellt. In Kapitel 2 werden die Grundgedanken dieser Inferenzmethode dargestellt, eine ausführlichere Darstellung findet sich in [6]. Kapitel 3 befaßt sich mit der Stabilitätsanalyse dynamischer Fuzzy-Systeme. Betrachtungen über die Analyse dynamische Fuzzy-Systeme erster und höherer Ordnung geht die Stabilitätsdefinition voraus. Der Reglerentwurf steht im Mittelpunkt des 4. Kapitels. Am Beispiel eines Rührkesselreaktors wird schließlich die Tragfähigkeit des Reglerentwurfsverfahrens gezeigt.

2 Inferenz mittels interpolierender Regeln

Bei diesem Inferenzverfahren [6], [7] werden die Regeln des Regelsatzes als "Stützregeln" aufgefaßt, die zur Berechnung interpolierender Regeln herangezogen werden. Abhängig von den Eingangsgrößen wird eine interpolierende Regel berechnet, deren Auswertung die unscharfe Ausgangsgröße ergibt. Einer interpolierenden Regel werden interpolierende Prämissen und eine interpolierende Konklusion, die sich durch Interpolation oder Extrapolation zwischen Prämissen und Konklusionen des Regelsatzes ergeben, zugeordnet.

2.1 Voraussetzungen

Die Betrachtung von Fuzzy-Systemen mit mehreren Eingangsgrößen und nur einer Ausgangsgröße ist ausreichend, da Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen als Parallelschaltung von Systemen mit einer Ausgangsgröße aufgefaßt werden können. Vorausgesetzt werden muß ein vollständiger Regelsatz, was bedeutet, daß für jede Kombination auf dem Grundbereich verschiedener Eingangsgrößen definierter Prämissen eine Regel existiert. Die den linguistischen Werten von Prämissen und Konklusionen zugeordneten unscharfen Mengen sowie die unscharfen Eingangsgrößen seien unscharfe Zahlen mit triangulären, normierten Zugehörigkeitsfunktionen.

Die Lage der interpolierenden Prämissen und der interpolierenden Konklusion ergeben sich durch Interpolation aus den Charakteristika der Prämissen- bzw. Konklusionszugehörigkeitsfunktionen einzelner Regeln. Eine Interpolation ist nur möglich, wenn die Koordinaten des rechten und linken Fußes sowie des Centers benachbarter Prämissenzugehörigkeitsfunktionen jeweils voneinander verschieden sind, was deshalb vorausgesetzt wird.

2.2 Bestimmung und Auswertung einer interpolierenden Regel

Das Inferenzverfahren wird im folgenden anhand des Regelsatzes

Wenn $E_1 = A$ und $E_2 = C$ **dann** $Y = AC$

Wenn $E_1 = A$ und $E_2 = D$ **dann** $Y = AD$

Wenn $E_1 = B$ und $E_2 = C$ **dann** $Y = BC$

Wenn $E_1 = B$ und $E_2 = D$ **dann** $Y = BD$

erläutert. Den *Eingangsvariablen* E_1 und E_2 sowie der *Ausgangsvariablen* Y werden unscharfe Eingangsgrößen bzw. unscharfe Ausgangsgrößen zugewiesen. Die auf den zugehörigen Grundbereichen definierten *Prämissen* A bis D und *Konklusionen* AC bis BD sind trianguläre unscharfe Zahlen, deren Parameter durch die entsprechenden Kleinbuchstaben mit den Indizes c für Center, r für rechter Fuß und l für linker Fuß gekennzeichnet werden. Beispielsweise werden der unscharfen Zahl A somit die Parameter $\langle a_c; a_l, a_r \rangle$ zugeordnet (Bild 1).

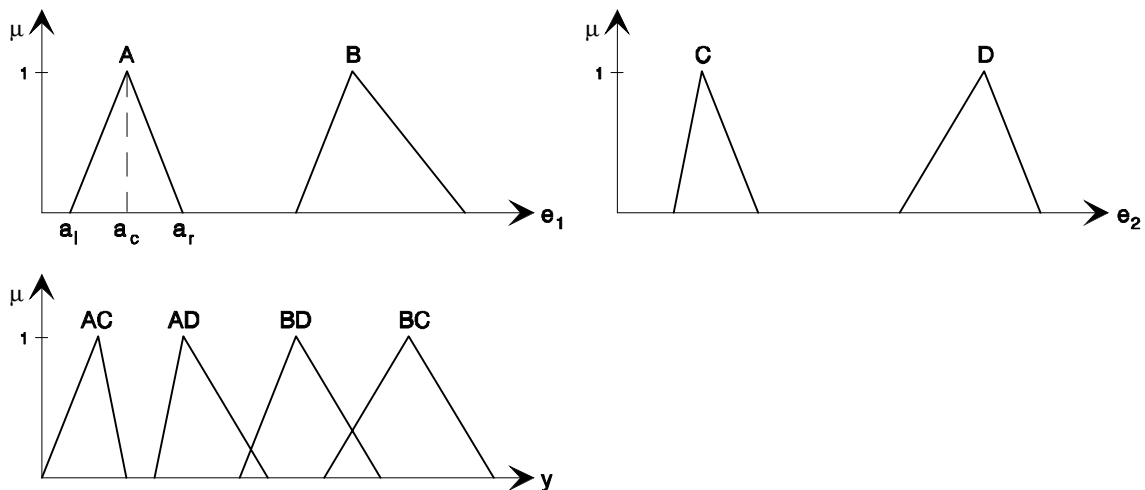


Bild 1: Prämissen- und Konklusionszugehörigkeitsfunktionen des Regelsatzes

Die beiden *interpolierenden Prämissen* IP_1 und IP_2 und die *interpolierende Konklusion* IK der *interpolierenden Regel*

Wenn $E_1 = IP_1$ und $E_2 = IP_2$ **dann** $Y = IK$

werden unter Berücksichtigung der Center der einwirkenden *Eingangsgrößen* U und V aus den Parametern der Prämissen und Konklusionen wie folgt ermittelt. Ist der Center einer Eingangsgröße gleich dem Center einer Prämisse, entspricht die zugehörige interpolierende Prämisse dieser Prämisse. Liegt der Center der Eingangsgröße (wie die beiden Eingangsgrößen U und V in Bild 2) zwischen den Centern zweier benachbarter Prämissen, werden Center und Füße der interpolierenden Prämisse durch lineare Interpolation berechnet. Die interpolierende Prämisse $IP_1 \langle ip1_c; ip1_l, ip1_r \rangle$ (Bild 2) ergibt sich beispielsweise zu

$$ip1_c = \alpha_A \cdot a_c + \alpha_B \cdot b_c$$

$$ip1_l = \alpha_A \cdot a_l + \alpha_B \cdot b_l$$

$$ip1_r = \alpha_A \cdot a_r + \alpha_B \cdot b_r,$$

wobei sich die *Prämissenbeiträge* α_A und α_B aus den relativen Centerabständen ergeben:

$$\alpha_A = \frac{b_c - u_c}{b_c - a_c} \quad (1a)$$

$$\alpha_B = \frac{u_c - a_c}{b_c - a_c} = 1 - \alpha_A. \quad (1b)$$

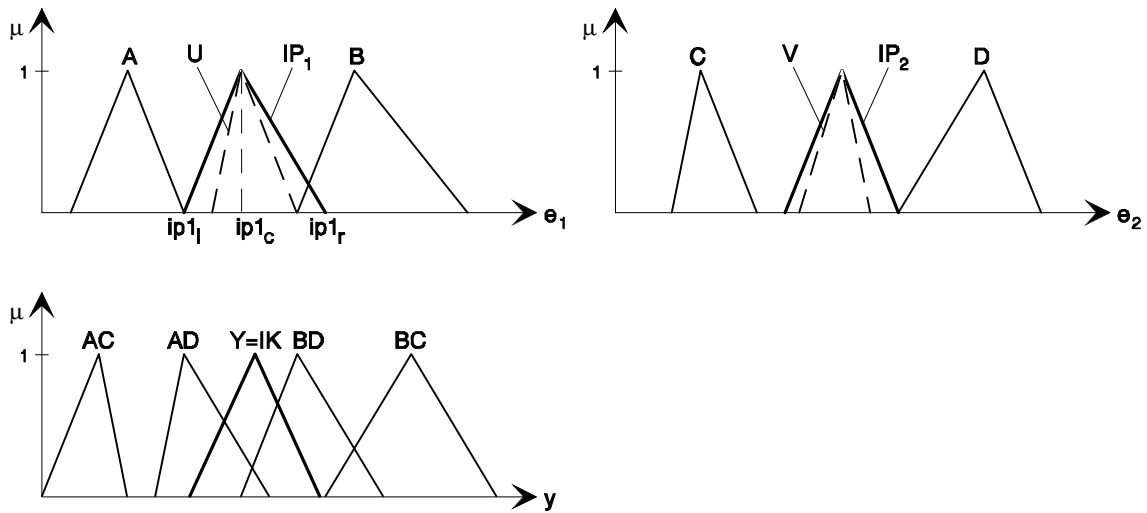


Bild 2: Interpolierende Prämissen, interpolierende Konklusion in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen

Die interpolierende Konklusion IK setzt sich aus den Konklusionen zusammen, die durch das Produkt aller zugehöriger Prämissenbeiträge gewichtet werden:

$$\begin{aligned} ik_c &= \alpha_A \alpha_C \cdot ac_c + \alpha_A \alpha_D \cdot ad_c + \alpha_B \alpha_C \cdot bc_c + \alpha_B \alpha_D \cdot bd_c \\ ik_l &= \alpha_A \alpha_C \cdot ac_l + \alpha_A \alpha_D \cdot ad_l + \alpha_B \alpha_C \cdot bc_l + \alpha_B \alpha_D \cdot bd_l \\ ik_r &= \alpha_A \alpha_C \cdot ac_r + \alpha_A \alpha_D \cdot ad_r + \alpha_B \alpha_C \cdot bc_r + \alpha_B \alpha_D \cdot bd_r. \end{aligned} \quad (2)$$

Je näher die Center der verschiedenen Eingangsgrößen am Center der Prämissen liegen, die einer bestimmten Konklusion zugeordnet sind, um so mehr beeinflusst diese Konklusion die interpolierende Konklusion.

Der Center der Ausgangsgröße entspricht grundsätzlich dem Center der interpolierenden Konklusion, der nach Gleichung (2) berechnet wird. Jeder Prämissenbeitrag hängt linear vom Center der zugehörigen Eingangsgröße ab, das Produkt verschiedener Prämissenbeiträge ist folglich eine multilinear von den Eingangsgrößen abhängende Funktion. Die Lage des Centers der Ausgangsgröße hängt damit multilinear von den Centern der

Eingangsgrößen ab. Bei zwei Eingangsgrößen wird der Center der Ausgangsgröße folglich durch eine Beziehung der Form

$$\begin{aligned} y_c &= \alpha_A \alpha_C \cdot ac_c + \alpha_A \alpha_D \cdot ad_c + \alpha_B \alpha_C \cdot bc_c + \alpha_B \alpha_D \cdot bd_c \\ &= u_c v_c \cdot g_3 + u_c \cdot g_2 + v_c \cdot g_1 + g_0 \end{aligned} \quad (3)$$

bestimmt, wobei sich die Konstanten g_0 bis g_3 aus den Centern der Prämissen und Konklusionen ergeben. Sind auf den Grundbereichen der Eingangsgrößen mehr als zwei Prämissen definiert, spannen jeweils 2 Prämissen eines Eingangsbereichs ein Interpolationsintervall [6] auf. Bei unscharfen Interpolationsintervallen ergeben sich neben den multilineareren Gebieten in den Übergangsbereichen zwischen zwei Interpolationsintervallen zusätzlich Zonen, in denen der Center der Ausgangsgröße quadratisch von einem oder mehreren Centern der Eingangsgrößen abhängen kann. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in diesem Beitrag jedoch von scharfen Übergängen zwischen den Interpolationsintervallen ausgegangen, wodurch sich insgesamt ein zonenweise multilinearer Zusammenhang zwischen den Centern der Eingangsgrößen und dem Center der Ausgangsgröße ergibt.

Sind sämtliche Eingangsgrößen Teilmengen der jeweiligen interpolierenden Prämissen, so ist der Informationsgehalt der Eingangsgrößen zumindest so groß wie der Informationsgehalt der interpolierenden Prämissen; die Ausgangsgröße wird dann gleich der interpolierenden Konklusion gewählt: $Y=IK$ (Bild 2). Sind nicht alle Eingangsgrößen Teilmengen der zugehörigen interpolierenden Prämissen, werden, unter der Voraussetzung, daß sich der Informationsgehalt der Ausgangsgröße dadurch verringert, die Füße der Ausgangsgröße durch Interpolation zwischen den Füßen der Konklusionen ermittelt. Um diesen Sachverhalt zu erklären, werden (Bild 3) die Eingangsgrößen U und V zunächst gleich den Prämissen A und C gewählt. Die Ausgangsgröße entspricht also der Konklusion AC . Bewegt sich zunächst der rechte Fuß der Eingangsgröße U nach rechts bis zum rechten Fuß der Prämisse B , so wandert der rechte Fuß der Ausgangsgröße bis auf den rechten Fuß der Konklusion BC (gestrichelte Linien!).

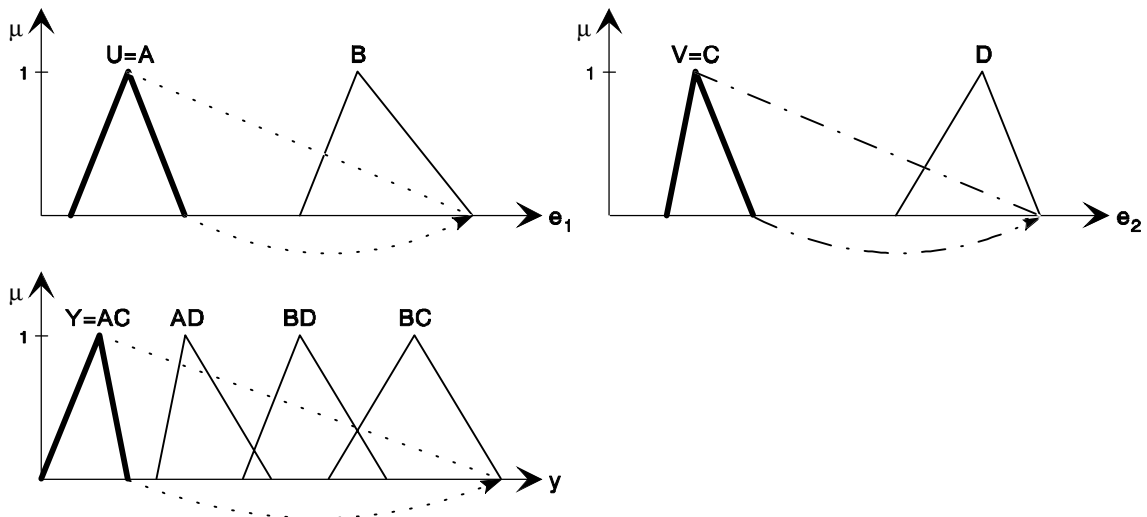


Bild 3: Änderung der Ausgangsgröße bei Verunschärfung der Eingangsgrößen

Die Berechnung des rechten Fußes der Ausgangsgröße erfolgt wieder durch Interpolation zwischen den rechten Füßen der Konklusionen, wobei nun jedoch nicht, wie in Gleichung (2), der Center der Eingangsgröße u_c , sondern deren rechter Fuß u_r für den Anteil der rechten Füße der Konklusionen am rechten Fuß der Ausgangsgröße verantwortlich zeichnet. Bezeichnet man diesen rechten Fuß zunächst mit y_r^* , so ergibt sich

$$y_r^* = \frac{u_r - a_r}{b_r - a_r} \alpha_C \cdot ac_r + \frac{u_r - a_r}{b_r - a_r} \alpha_D \cdot ad_r + \frac{b_r - u_r}{b_r - a_r} \alpha_C \cdot bc_r + \frac{b_r - u_r}{b_r - a_r} \alpha_D \cdot bd_r. \quad (4)$$

Anstelle der Prämissenbeiträge α_A und α_B (Gleichungen (2) und (1)) werden in Gleichung (4) die Anteile der rechten Füße verwendet, wodurch sich der Informationsgehalt der Ausgangsgröße verringert. Verschiebt sich nun ebenfalls der rechte Fuß der zweiten Eingangsgröße V nach rechts auf den rechten Fuß der Prämisse D (strichpunktierte Linie), ändert sich die Lage des rechten Fußes der Ausgangsgröße nicht; würde auch der rechte Fuß v_r der Eingangsgröße V anstelle des Centers zur Bestimmung der Ausgangsgröße herangezogen, würde sich der rechte Fuß der Ausgangsgröße nach links auf den rechten Fuß der Konklusion BD verschieben. Die Unschärfe der Ausgangsgröße würde sinken, ein Informationsverlust an einem Eingang des Fuzzy-Systems würde einen Informationsgewinn am Ausgang nach sich ziehen, was unsinnig wäre. Die Forderung, daß sich der rechte Fuß der Ausgangsgröße bei einem Informationsverlust an einem Eingang nur nach rechts bewegen darf, läßt sich mathematisch mit Hilfe des Maximum-Operators umsetzen:

$$y_r^{**} = \max \left[y_r^*, \frac{u_r - a_r}{b_r - a_r} \frac{v_r - c_r}{d_r - c_r} \cdot ac_r + \frac{u_r - a_r}{b_r - a_r} \frac{d_r - v_r}{d_r - c_r} \cdot ad_r + \frac{b_r - u_r}{b_r - a_r} \frac{v_r - c_r}{d_r - c_r} \cdot bc_r + \frac{b_r - u_r}{b_r - a_r} \frac{d_r - v_r}{d_r - c_r} \cdot bd_r \right]. \quad (5)$$

y_r^* ist der nach Gleichung (4) bestimmte rechte Fuß der Ausgangsgröße. y_r^{**} ergibt sich unter Berücksichtigung der Verschiebung des rechten Fußes der Eingangsgröße V , im Beispiel nach Bild (3) ändert sich dadurch allerdings der rechte Fuß der Ausgangsgröße nicht ($y_r^{**} = y_r^*$). Gleichung (5) beinhaltet noch nicht alle Fälle, die zur Bestimmung des rechten Fußes der Ausgangsgröße im allgemeinen auftreten können. Es kann sich beispielsweise auch eine Verschiebung des linken Fußes einer Eingangsgröße auf den rechten Fuß einer Ausgangsgröße auswirken.

Im Gegensatz zur zonenweise multilinearen Centerbeziehung nach Gleichung (3) hängen die Füße der Ausgangsgröße nur unter bestimmten Voraussetzungen, die bei Systemen mit einer Eingangsgröße oftmals erfüllt sind, multilinear von den Füßen der Eingangsgrößen ab. Bei der Stabilitätsanalyse in Kapitel 3 wird bei Eingrößensystemen von dieser Eigenschaft Gebrauch gemacht. Im allgemeinen treten jedoch Max- und Min-Operatoren auf (Gleichung 5), die dafür sorgen, daß in keinem Fall eine Verunschärfung einer Eingangsgröße zu einem Informationsgewinn am Ausgang führen kann.

3 Stabilitäts+analyse dynamischer Fuzzy-Systeme

Die Struktur der betrachteten dynamischen Fuzzy-Systeme ist in Bild 4 am Beispiel eines Systems erster Ordnung wiedergegeben. Schwerpunkt dieses Kapitels ist die Stabilitätsanalyse der Ruhelagen, die sich bei konstanter unscharfer Eingangsgröße für solche Fuzzy-Systeme ergeben.

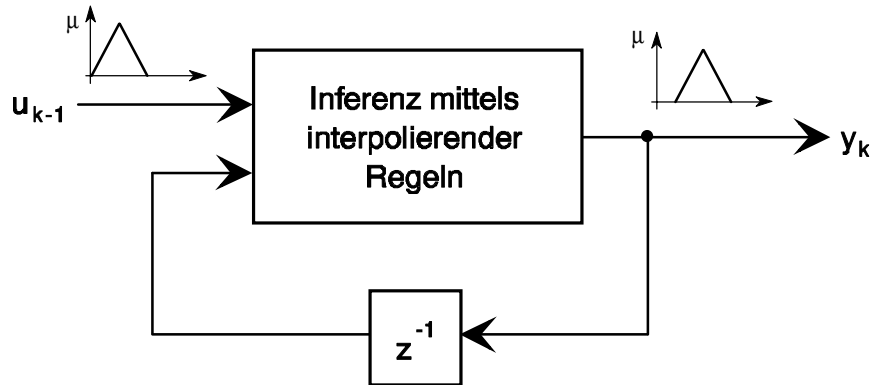


Bild 4: Dynamisches Fuzzy-System erster Ordnung

In [6], [7] sind verschiedene Verhaltensweisen eines dynamischen Fuzzy-Systems erster Ordnung dargestellt; anhand der angeführten Beispiele wird deutlich, daß zwei Bedingungen erfüllt sein müssen, damit eine unscharfe Ruhelage als stabil bezeichnet werden kann: Zum einen muß für den Center der unscharfen Ausgangsgröße eine stabile scharfe Ruhelage existieren, zum anderen dürfen sich die Füße der Ausgangsgröße nicht beliebig weit von dieser Ruhelage des Centers entfernen. Damit wird die folgende Stabilitätsdefinition [7] plausibel:

Definition:

Eine Ruhelage eines dynamischen Fuzzy-Systems wird durch einen scharfen Wert R_0 gekennzeichnet. Die Ruhelage ist genau dann (asymptotisch) stabil, wenn

- R_0 für den Center der Ausgangsgröße eine nach [3] (asymptotisch) stabile Ruhelage darstellt
- die Füße der Ausgangsgröße eine endliche Umgebung von R_0 nicht verlassen

Bei Systemen erster Ordnung wird, bei konstantem u_{k-1} , die Abhängigkeit des Centers der Ausgangsgröße $y_{k,c}$ von seinem Vergangenheitswert $y_{k-1,c}$ durch die Centergleichung

$$y_{k,c} = f(y_{k-1,c}) \quad (6)$$

mit einer stückweise linearen Kennlinie $f(\cdot)$ beschrieben. Zusätzlich zu den unter 2.1 getroffenen Voraussetzungen wird angenommen, daß sich der rechte (bzw. linke) Fuß jeder Zugehörigkeitsfunktion nicht mit dem rechten (linken) Fuß einer benachbarten Zugehörigkeitsfunktion schneidet. Dadurch ist auch ein bereichsweise linearer Zusammenhang der Füße $y_{k,r}$ und $y_{k,l}$ von den Füßen und der Ausgangsgröße im vorherigen

Schritt gewährleistet. Somit wird das Systemverhalten in einem Gebiet um die betrachtete Ruhelage durch maximal zwei Differenzengleichungen der Form

$$\begin{pmatrix} y_{k,c} \\ y_{k,r} \\ y_{k,l} \end{pmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} y_{k-1,c} \\ y_{k-1,r} \\ y_{k-1,l} \end{pmatrix} + \underline{b} \quad (7)$$

mit jeweils konstanten Matrizen \underline{A} und Vektoren \underline{b} beschrieben. Anhand der Eigenwerte der Matrix \underline{A} läßt sich das Stabilitätsverhalten der Ruhelage beurteilen. Liegen beispielsweise alle Eigenwerte im Einheitskreis, ist die Ruhelage asymptotisch stabil. Anhand der Centergleichung (6) läßt sich der Einzugsbereich der Centerruhelage R_0 ermitteln, der mit dem Einzugsbereich einer stabilen Ruhelage des dynamischen Fuzzy-Systems identisch ist.

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt wurde, ist die Centergleichung bei Systemen höherer Ordnung eine bereichsweise multilineare Funktion. Durch analytische Betrachtungen läßt sich in vielen Fällen nur ein Teil des Einzugsbereiches einer Centerruhelage bestimmen. In [4] wird gezeigt, daß sich numerische Methoden wie die konvexe Zerlegung [2], [5] erfolgreich einsetzen lassen, um weitere Gebiete dem Einzugsbereich einer Ruhelage zuzuordnen. Sind die auf dem Ausgangsbereich y_k definierten Konklusionszugehörigkeitsfunktionen hinreichend scharf, ist die Analyse der Centergleichung ausreichend, um die Stabilität des dynamischen Fuzzy-Systems zu beurteilen. Andernfalls ist auch das Verhalten der Füße zu analysieren, was bei Systemen höherer Ordnung einen beträchtlichen Mehraufwand nach sich zieht.

4 Fuzzy-modellgestützter Fuzzy-Reglerentwurf

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie anhand eines Fuzzy-Regelsatzes, der einen dynamischen Prozeß qualitativ beschreibt, ein Fuzzy-Regler entworfen werden kann. Ziel ist es, aus einer linguistischen Streckenbeschreibung, die durch die Inferenz mittels interpolierender Regeln mathematisch interpretiert wird, eine linguistische Reglerbeschreibung zu generieren, die das System in eine gewünschte Ruhelage bringt.

Die linguistische Reglerbeschreibung in Form eines Fuzzy-Regelsatzes liefert für verschiedene unscharfe Prozeßzustände eine als Stellgröße geeignete Konklusion. Wird eine solche Konklusion durch einen scharfen Wert repräsentiert, sind als Konklusionen für den Regler Singletons zu verwenden. Das Problem des Reglerentwurfs läßt sich damit bei hinreichend scharfer Streckenbeschreibung zunächst auf die Regelung eines diskreten, nichtlinearen Systems zurückführen, dessen Ausgangsgröße zonenweise multilinear von der Eingangsgröße und dem Vergangenheitswert der Ausgangsgröße abhängt. Mit Hilfe des für dieses System entworfenen nichtlinearen Reglers wird schließlich ein Fuzzy-Regelsatz zur linguistischen Beschreibung des Reglerverhaltens gewonnen. Dieser Regelsatz kann, nach Modifikation der Prämissenzugehörigkeitsfunktionen, mit einem konventionellen Inferenzverfahren ausgewertet werden. Damit ist schließlich eine Abstimmung des Reglers am realen Prozeß mit eingeführten Methoden und Softwarewerkzeugen möglich.

Der Reglerentwurf wird anhand eines SISO-Fuzzy-Systems 1. Ordnung (Bild 4) erläutert. Die Erweiterung auf Systeme höherer Ordnung wird anschließend kurz beschrieben. Auf dem Grundbereich des Vergangenheitswerts der Ausgangsgröße y_{k-1} seien die Prämissen A, B und C definiert, auf dem Grundbereich der Eingangsgröße u_{k-1} die beiden Prämissen X und Z. Das Prozeßverhalten werde durch die Regeln

Wenn $Y_{k-1}=A$ und $U_{k-1}=X$ **dann** $Y_k=AX$
Wenn $Y_{k-1}=B$ und $U_{k-1}=X$ **dann** $Y_k=BX$
Wenn $Y_{k-1}=C$ und $U_{k-1}=X$ **dann** $Y_k=CX$
Wenn $Y_{k-1}=A$ und $U_{k-1}=Z$ **dann** $Y_k=AZ$
Wenn $Y_{k-1}=B$ und $U_{k-1}=Z$ **dann** $Y_k=BZ$
Wenn $Y_{k-1}=C$ und $U_{k-1}=Z$ **dann** $Y_k=CZ$

beschrieben. Die Konklusionen seien hinreichend scharf, so daß bei Singletons als Eingangsgrößen die Betrachtung der Abbildung der Center ausreichend ist.

Diese Centergleichung lautet entsprechend (3)

$$y_{k,c} = \alpha_A \alpha_X \cdot ax_c + \alpha_B \alpha_X \cdot bx_c + \alpha_C \alpha_X \cdot cx_c + \alpha_A \alpha_Z \cdot az_c + \alpha_B \alpha_Z \cdot bz_c + \alpha_C \alpha_Z \cdot cz_c \quad (8)$$

Die Prämissenbeiträge der Eingangsgröße

$$\alpha_X = \frac{z_c - u_{k-1,c}}{z_c - x_c} \text{ und } \alpha_Z = \frac{u_{k-1,c} - x_c}{z_c - x_c} = 1 - \alpha_X$$

hängen linear von $u_{k-1,c}$ ab, so daß

$$y_{k,c} = r(y_{k-1,c}) + h(y_{k-1,c}) \cdot u_{k-1,c}$$

eine andere Schreibweise für Gleichung (8) darstellt. Der Center der Ausgangsgröße $y_{k,c}$ soll in die gewünschte Ruhelage y_R eingeregelt werden. Setzt man $h(y_{k-1,c}) \neq 0 \forall y_{k-1,c}$ voraus, wird durch

$$u_{k-1,c} = \frac{y_R - r(y_{k-1,c})}{h(y_{k-1,c})} \quad (9)$$

der Center der Ausgangsgröße aus jedem Systemzustand $y_{k-1,c}$ in einem Schritt in die gewünschte Ruhelage y_R gebracht. Ohne Stellgrößenbeschränkung würde der gesamte Definitionsbereich zum Einzugsbereich der Ruhelage y_R gehören. Unter Berücksichtigung einer Stellgrößenbeschränkung kann, beispielsweise durch Ansetzen der quadratischen Ljapunov-Funktion

$$V(y_{k,c}) = (y_{k,c} - y_R)^2, \quad (10)$$

ein gesicherter Einzugsbereich der Ruhelage y_R bestimmt werden. Ein solcher Einzugsbereich existiert, wenn in der Ruhelage die Stellgröße nach (9)

$$u_{R,c} = \frac{y_R - r(y_R)}{h(y_R)}$$

nicht auf dem Rand oder außerhalb, sondern innerhalb des zulässigen Stellbereichs liegt. Wegen der Stetigkeit der Funktionen $r(\cdot)$ und $h(\cdot)$ bleibt in einer Umgebung der Ruhelage die notwendige Stellgröße in der Umgebung von u_R und damit im zulässigen Bereich. Es existiert somit ein Einzugsbereich der Ruhelage, in dem die Ausgangsgröße innerhalb eines Schritts in die gewünschte Ruhelage gebracht wird. Mit Hilfe von Gleichung (10) kann ein größerer Einzugsbereich bestimmt werden, in dem nach [3] die Vorwärtsdifferenz $\Delta V = V(y_{k,c}) - V(y_{k-1,c})$ kleiner Null sein muß. Aus (10) ergibt sich damit die Bedingung

$$(y_{k,c} - y_R)^2 < (y_{k-1,c} - y_R)^2 \quad \forall y_{k-1,c} \neq y_R. \quad (11)$$

Mit Hilfe von Gleichung (11) werden Gebiete dem Einzugsbereich einer Ruhelage zugeordnet, in denen die Stellgröße trotz Beschränkung in der Lage ist, den Abstand zwischen der Ausgangsgröße und der gewünschten Ruhelage im folgenden Schritt zu verringern.

Beim Reglerentwurf wird somit zunächst ohne Berücksichtigung von Restriktionen das Regelgesetz (9) aufgestellt. Anschließend wird der Einzugsbereich der gewünschten Ruhelage unter Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkung ermittelt. Für jeden Center $y_{k-1,c}$ aus dem Einzugsbereich kann mit (9) eine geeignete Stellgröße ermittelt werden; zunächst wird der Regelsatz

$$\begin{aligned} \text{Wenn } Y_{k-1} &= A \quad \text{dann } U_{k-1} = u_A \\ \text{Wenn } Y_{k-1} &= B \quad \text{dann } U_{k-1} = u_B \\ \text{Wenn } Y_{k-1} &= C \quad \text{dann } U_{k-1} = u_C \end{aligned} \quad (12)$$

mit den aus der Streckenbeschreibung bekannten Prämissen A, B und C für den Regler verwendet. Die Lage der scharfen Konklusionen u_A , u_B und u_C ergibt sich aus (9) beispielsweise für die erste Regel zu

$$u_A = \frac{y_R - r(a_c)}{h(a_c)}.$$

Die Auswertung des Regelsatzes (12) durch die Inferenz mittels interpolierender Regeln ergibt nur an den Centern der Prämissen a_c , b_c und c_c denselben Wert wie die Stellgrößenberechnung nach (9). Liegt $y_{k-1,c}$ zwischen den Stützstellen a_c , b_c und c_c , wird die Stellgröße durch Interpolation ermittelt. Durch Einfügen weiterer Regeln können Stützstellen erzeugt werden, die das Kennfeld, das der durch (12) beschriebene Regler für scharfe Eingangsgrößen y_{k-1} darstellt, weiter an (9) annähern. Weitere Regeln sollten

in jedem Fall dann eingefügt werden, wenn (12) nicht in der Lage ist, die gewünschte Ruhelage mit dem vorher anhand des Regelgesetzes (9) ermittelten Einzugsgebiet zu stabilisieren.

Ist das qualitative Streckenmodell ein dynamisches Fuzzy-System höherer Ordnung, wird anstelle von (9) die Gleichung

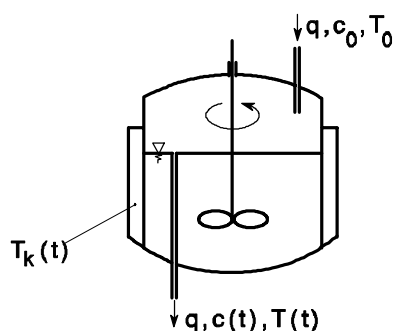
$$u_{k-1,c} = \frac{y_R - r(y_{k-1,c}, \dots, y_{k-n,c}, u_{k-2,c}, \dots, u_{k-m,c})}{h(y_{k-1,c}, \dots, y_{k-n,c}, u_{k-2,c}, \dots, u_{k-m,c})}$$

als Ausgangspunkt zur Ermittlung der linguistischen Beschreibung des Reglerverhaltens verwendet. Die weiteren Schritte der oben beschriebenen Vorgehensweise gelten entsprechend.

Prinzipiell könnte der ermittelte Regelsatz für einen Fuzzy-Regler verwendet werden, der anhand der Inferenz mittels interpolierender Regeln ausgewertet wird. Eine Defuzzifizierung wäre wegen der scharfen Konklusionen bei scharfen Reglereingangsgrößen nicht notwendig; ein solcher Regler beschreibt ein bereichsweise multilineares Kennfeld. Dieses Kennfeld läßt sich - im nachhinein - auch mit Hilfe von konventionellen Fuzzy-Methoden darstellen. Wird die Sum-Prod-Inferenz in Verbindung mit der Schwerpunktdefuzzifizierung verwendet, erhält man dasselbe Kennfeld wie bei der Inferenz mittels interpolierender Regeln, wenn lediglich die Prämissenzugehörigkeitsfunktionen wie folgt modifiziert werden: Die Center bleiben erhalten, die Füße im Gültigkeitsbereich werden auf den Center der jeweils benachbarten Zugehörigkeitsfunktion verschoben. Der Gültigkeitsbereich ist in jedem Eingangsbereich das Gebiet zwischen den beiden äußeren Centern.

5 Anwendungsbeispiel

Das beschriebene Fuzzy-Regler Entwurfsverfahren wird im folgenden für einen lediglich qualitativ beschriebenen Rührkesselreaktors (Bild 5) durchgeführt.



q : konstant zufließender Volumenstrom
 c_0 : Einlaufkonzentration von Stoff A
 T_0 : Einlauftemperatur von Stoff A

$T_k(t)$: Kühlmitteltemperatur zur Zeit t

$c(t)$: Konzentration von Stoff A im Reaktor zur Zeit t
 $T(t)$: Temperatur von Stoff A im Reaktor zu Zeit t

Bild 5

In den betrachteten Rührkesselreaktor [1] wird mit konstantem Volumenstrom ein Stoff A mit der Konzentration c_0 eingeleitet, der unter Einwirkung eines Katalysators in andere Stoffe zerfällt. Die Temperatur T der Flüssigkeit im Reaktor soll auf einen Wert eingeregelt werden, bei dem die Reaktion mit einer gewünscht hohen Intensität abläuft. Stellgröße ist die Temperatur des Kühlmittels T_k , die im angestrebten Arbeitspunkt den

Wert T_0 annimmt. Zur Vereinfachung der Darstellung werden die bezogenen Größen u für die Kühlmitteltemperatur und τ für die Stofftemperatur eingeführt:

$$u = \frac{T_k - T_0}{T_0}, \quad \tau = \frac{T - T_0}{T_0}.$$

Im einzuregelnden Arbeitspunkt ist die bezogene Kühlmitteltemperatur gleich null und die bezogene Stofftemperatur τ beträgt 0,05.

Die auf der bezogenen Stofftemperatur τ_k definierte unscharfe Ausgangsgröße τ_k hängt von ihren unscharfen Vergangenheitswerten τ_{k-1} und τ_{k-2} sowie den Vergangenheitswerten U_{k-1} und U_{k-2} der unscharfen Eingangsgröße Kühlmitteltemperatur ab. Auf den Grundbereichen $\langle \tau_{k-2}; \tau_{k-1}; u_{k-2}; u_{k-1} \rangle$ sind $\langle 4; 3; 2; 2 \rangle$ Zugehörigkeitsfunktionen definiert. Das Systemverhalten wird damit durch 48 Regeln der Form

Wenn U_{k-2} neg **und** U_{k-1} pos **und** τ_{k-2} mittel **und** τ_{k-1} groß **Dann** τ_k sehr groß

charakterisiert. Bild 6 zeigt beispielhaft die auf τ_{k-1} definierten Zugehörigkeitsfunktionen. Aus der qualitativen Streckenbeschreibung wird mit Gleichung (9) für jede Centerkombination $\langle \tau_{k-2,c}; \tau_{k-1,c}; u_{k-2,c} \rangle$ die zugehörige Stellgröße u_{k-1} berechnet, um die Ausgangsgröße τ_k in einem Schritt in die gewünschte Ruhelage $\tau_R = 0,05$ zu überführen. Die so bestimmten Werte werden als scharfe Konklusionen der jeweiligen Regeln verwendet. Es ergibt sich damit resultierend eine aus 24 Regeln bestehende linguistische Beschreibung des Reglerverhaltens. Das mit diesem Regler geregelte qualitative Prozeßmodell erweist sich, auch unter Berücksichtigung einer Stellgrößenbegrenzung von $|u| \leq 0,04$, als stabil. Die Anzahl der Regeln ist daher ausreichend, und es müssen keine weiteren Stützstellen eingefügt werden.

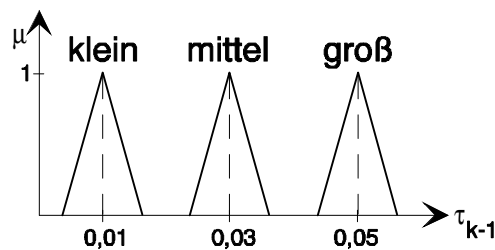


Bild 6: Auf τ_{k-1} definierte Zugehörigkeitsfunktionen

Um die Sum-Prod-Inferenz zur Auswertung des Regelsatzes verwenden zu können, müssen die Prämissenzugehörigkeitsfunktionen, wie in Kapitel 4 beschrieben, modifiziert werden. Beispielsweise werden die in Bild 6 gezeigten Zugehörigkeitsfunktionen durch die Zugehörigkeitsfunktionen nach Bild 7 ersetzt.

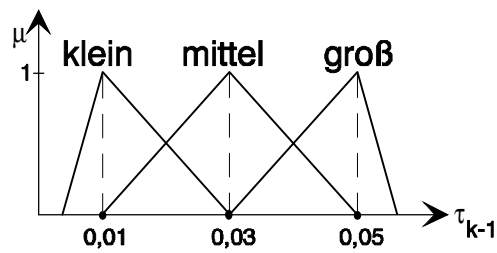


Bild 7: Modifizierte Zugehörigkeitsfunktionen

Das Verhalten des geregelten Systems wird mit Hilfe des kontinuierlichen Prozeßmodells [1] in der Simulation untersucht. Bild 8 zeigt die Zeitverläufe für den Fall, daß das System aus der Ruhelage $\tau_{R_0} = 0,01$; $u_{R_0} = -0,0224$ in die gewünschte Ruhelage $\tau_R = 0,05$; $u_R = 0$ überführt wird. Dabei wird auch der zeitliche Verlauf der bezogenen, nicht meßbaren Konzentration des Stoffes A

$$\kappa = \frac{c_0 - c}{c_0}$$

dargestellt. Es ergibt sich ein stabiles und dynamisch wie auch stationär gutes Verhalten.

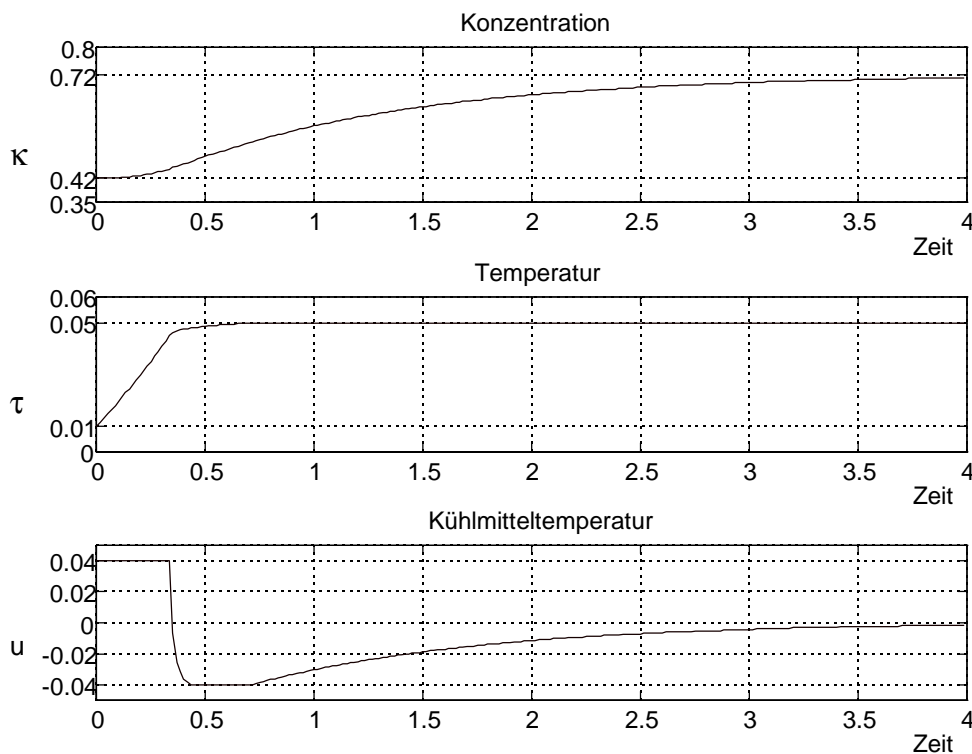


Bild 8: Verhalten des geregelten Rührkesselreaktors

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde zunächst gezeigt, wie für qualitative Prozeßmodelle in Form dynamischer Fuzzy-Systeme, die anhand der Inferenz mittels interpolierender Regeln beschrieben werden, eine Stabilitätsaussage vorgenommen werden kann. Es wurde ein

neues Reglersyntheseverfahren vorgestellt, das ein dynamisches Fuzzy-System in einer gewünschten Ruhelage stabilisiert. Darüber hinaus wurde deutlich, daß Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt werden können.

Schwerpunkt weiterer Arbeiten ist es, allein anhand von Meßdaten ein qualitatives, für die vorgestellte Modellstruktur geeignetes Prozeßmodell zu generieren. Ferner wird untersucht, inwieweit eine Stellgrößenbeschränkung bereits bei der Reglersynthese explizit berücksichtigt werden kann.

- [1] *O. Föllinger*: Nichtlineare Regelungen I, Oldenbourg Verlag, 1993
- [2] *H. Kiendl*: Robustheitsanalyse von Regelungssystemen mit der Methode der konvexen Zerlegung. Automatisierungstechnik 35, S. 192-202, 1987 (5).
- [3] *J. P. LaSalle*: The Stability and Control of Discrete Processes. Applied Mathematical Sciences 62, Springer-Verlag, 1986.
- [4] *G. M. Nenninger*: Entwicklung neuer Methoden zur Stabilitätsuntersuchung von Fuzzy-Modellen. Diplomarbeit D 666, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe.
- [5] *O. Rumpf*: Anwendung der Methode der konvexen Zerlegung zur Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme mit neuronalen Komponenten. Automatisierungstechnik 44, pp 101-107, 1996 (3).
- [6] *E. Schäfers*: Inferenz mittels interpolierender Regeln-ein neues Verfahren zur Beschreibung von Fuzzy-Systemen. 5. Workshop "Fuzzy-Control" des GMA-UA 1.4.2, 1995.
- [7] *E. Schäfers, V. Krebs*: Modeling and Analysis of Qualitative Systems Based on a New Fuzzy Inference Approach. Intelligent Systems, Second International Symposium, Sankt Petersburg, Rußland 1996.